Symbol Newtona

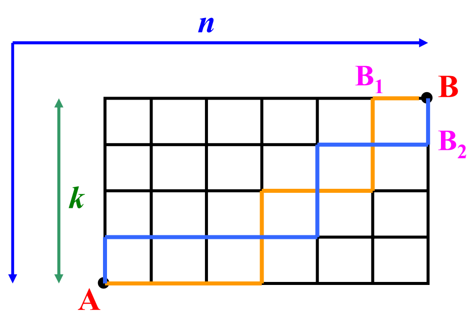
liczba wyborów zbioru ***k***-elementowego ze zbioru ***n*** elementów

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad n \geq k$$

$$\binom{n}{0} = 1 \qquad \binom{n}{n} = 1 \qquad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

Krata



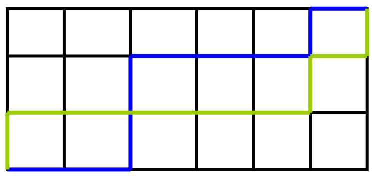
Każda droga: ***n*** odcinków, ***k*** „do góry” $\Rightarrow \binom{n}{k}$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

Ile rozwiązań ma równanie:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6$$

gdzie x_i są nieujemnymi liczbami całkowitymi?



$x_4 = 1$ $x_4 = 0$

$x_3 = 3$ $x_3 = 1$

$x_2 = 0$ $x_2 = 5$

$x_1 = 2$ $x_1 = 0$

$$\binom{9}{3} = 84$$

Liczba rozwiązań równania: $x_1 + x_2 + ... + x_k = n$

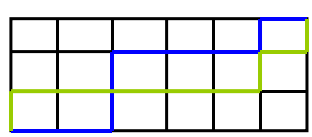
$$\binom{n+k-1}{k-1}$$

Ciąg binarny

Ciąg binarny **0 0 1 1 0 0 0 1 0** **1 0 0 0 0 0 1 0 1**

Ciąg binarny złożony z n jedynek i m zer.
Ile ich jest? $\binom{n+m}{n}$

- sposób zakodowania drogi w kracie



- rozmieszczenie przedmiotów w pudełkach
- liczba rozwiązań równań w liczbach całkowitych

Rozmieszczenie przedmiotów

Mamy ***r*** jednakowych kulek i ***n*** rozróżnialnych komórek.

Ile jest wszystkich możliwych rozmieszczeń kul w komórkach?

o o | o o o | o o || o o | o

Mamy ***r*** zer (kółka) i ***n*–1** jedynek (kreski)

Symbole mogą być ustawione w dowolnej kolejności.

Dwie kreski obok siebie - komórka pusta.

Mamy ***r*+*n*–1** symboli, należy wybrać miejsca na postawienie zera lub miejsce na postawienie jedynki.

Tych wyborów jest:

$$\binom{r+n-1}{n-1} = \binom{r+n-1}{r}$$

Mamy ***r*** jednakowych kulek i ***n*** rozróżnialnych komórek.

Ile jest możliwych rozmieszczeń kul w komórkach takich, że żadna komórka nie jest pusta **(*r* ≥ *n*)?**

o o | o o o | o o | o o | o

Aby żadna komórka nie była pusta, nie można stawiać więcej niż jedną kreskę między dwiema kulkami.

W ilu miejscach można postawić jedynkę (kreskę)?

Można wstawić ***n*–1** kresek w ***r*–1** miejscach.

Liczba wyborów:

$$\binom{r-1}{n-1}$$

Liczba rozwiązań równania

Ile rozwiązań ma równanie:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n$$

a) gdzie x_i są nieujemnymi liczbami całkowitymi?

b) gdzie x_i są dodatnimi liczbami całkowitymi?

a) Można uznać, że mamy ***n*** kul (zer) i ***k*** komórek (składników - jedynek).
x_i oznacza liczbę kul w ***i***-tej komórce. Komórki mogą być puste.

o o | o o o | o o || o o | o

2+3+2+0+2+1=10

$$\binom{n+k-1}{k-1}$$

b) Nie ma pustych komórek.

o o | o o o | o o | o o | o

$$\binom{n-1}{k-1}$$

Serie

Ciąg binarny złożony z ***n*** jedynek i ***m*** zer.

Serią nazywamy maksymalny podciąg kolejnych, jednakowych elementów.

W ciągu **0 1 1 1 0 0 1 1 1 1 0 1** jest **6** serii.

Liczba serii zer i jedynek różnią się o 1.

Przyjmijmy, że $1 \leq n \leq m$.
Wtedy liczba serii ***R*** dowolnego (n,m)-ciągu binarnego spełnia:

$$2 \leq R \leq \begin{cases} 2n & gdy \quad n = m \\ 2n+1 & gdy \quad n < m \end{cases}$$

Ile jest (n,m)-ciągów o zadanej liczbie serii R?

Traktujemy serie jako niepuste komórki.

W przypadku $\boldsymbol{R=2k}$,
mamy $\boldsymbol{k}$ komórek dla $\boldsymbol{n}$ jedynek i $\boldsymbol{k}$ komórek dla $\boldsymbol{m}$ zer.

Jedynki i zera rozmieszczamy w komórkach niezależnie tak, żeby żadna komórka nie pozostała pusta. Ponadto ciąg może zaczynać się od jedynki lub zera, co daje dodatkowy czynnik 2.

$$2\binom{n-1}{k-1}\binom{m-1}{k-1}$$

Analogicznie, gdy $\boldsymbol{R=2k+1}$

$$\binom{n-1}{k}\binom{m-1}{k-1}+\binom{n-1}{k-1}\binom{m-1}{k}$$

Przykład:

Przed kasą wystawy ustawiła się 100-osobowa kolejka. Bilety są w cenie 5 złotych. W kasie nie ma żadnych pieniędzy. 50 osób dysponuje monetą 5-złotową, a pozostałe tylko banknotem 10-złotowym. Zakładamy, że kolejność osób jest przypadkowa i że wszyscy kupują po jednym bilecie.

Ile jest takich ustawień kolejki, że żadna osoba nie będzie zmuszona czekać na wydanie reszty?

Kolejkę można przedstawić jako (50,50)-ciąg binarny, gdzie jedynka oznacza osobę posiadającą banknot 10-złotowy, a zero - osobę z monetą 5-złotową.

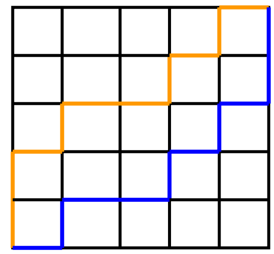
W ciągu musi być co najmniej tyle zer, co jedynek w każdym początkowym fragmencie.

Oznaczamy liczbę takich ciągów $\boldsymbol{d(50,50)}$.

Przykład: Spacer po ulicach.

Odcinek powyżej przekątnej jest niebezpieczny.

Ile jest takich możliwości spaceru, żeby nie trafić do tego obszaru?



Liczba odcinków pionowych nigdy nie powinna przekroczyć liczby odcinków poziomych.

Odpowiedź: $\boldsymbol{d(n,m)}$.

Funkcja d(n,m)

Liczba tych (***n***,***m***)– ciągów, w których, dla każdego ***i***=1, 2, ... , ***n***+***m***, na pierwszych ***i*** pozycjach znajduje się co najmniej tyle zer co jedynek.

Ciągi zdominowane przez zera.

Na przykład, dla *n*=3 i *m*=4

0 1 0 0 1 1 0 ciąg zdominowany **0 1 0 1 1 0 0** nie jest zdominowany.

Twierdzenie:

Jeśli $\boldsymbol{n} \le \boldsymbol{m}$, to liczba ciągów zdominowanych, składających się z ***n*** jedynek i ***m*** zer, wynosi:

$$d(n,m) = \frac{m+1-n}{m+1}\binom{n+m}{m}$$

Liczby Catalana: $d(n,n) = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$

Symbol Newtona - współczynnik dwumianowy

$(a+b)^0 = 1$	1	
$(a+b)^1 = a+b$	1 1	
$(a+b)^2 = aa + 2ab + bb$	1 2 1	
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	1 3 3 1	**trójkąt Pascala**

$(a+b)(a+b)(a+b) =$

$aaa + \underbrace{(aab + aba + baa)} + (abb + bab + bba) + bbb$

tyle, ile jest możliwych wyborów
takich iloczynów, w których **a** występuje 2 razy

$(a+b)^3 = \binom{3}{3} a^3 + \binom{3}{2} a^2b + \binom{3}{1} ab^3 + \binom{3}{0} b^3 .$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

$$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 + \ldots + \binom{n}{k} x^k + \ldots + \binom{n}{n} x^n$$

$$x = 1 \qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

n	$\binom{n}{k}$	2^n
0	1	2^0
1	1 1	2^1
2	1 2 1	2^2
3	1 3 3 1	2^3
4	1 4 6 4 1	2^4

Współczynniki wielomianowe

Na ile sposobów można podzielić n-elementowy zbiór X na r rozłącznych podzbiorów $A_1, A_2, \ldots, A_r$ o mocy odpowiednio $k_1, k_2, \ldots, k_r$, gdzie $k_1 + k_2 + \ldots + k_r = n$?

Zbiór A_1 można wybrać na $\binom{n}{k_1}$ sposobów

Zbiór A_2 można wybrać na $\binom{n-k_1}{k_2}$ sposobów ...

$$\binom{n}{k_1}\binom{n-k_1}{k_2}\binom{n-k_1-k_2}{k_3}\ldots\binom{n-k_1-k_2-\ldots-k_{r-1}}{k_r}$$

$$= \frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_r!} = \underbrace{\binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_r}}_{\text{współczynnik wielomianowy}}$$

Wzór na współczynnik wielomianowy służy też do przeliczania permutacji z powtórzeniami.

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_r)^n = \sum_{\substack{k_1,\ldots,k_r \geq 0 \\ k_1+k_2+\ldots k_r = n}} \binom{n}{k_1, \ldots, k_r} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot a_r^{k_r}$$

Współczynniki wielomianowe stosujemy tylko wówczas, gdy $r \geq 2$ oraz r liczb stojących w dolnym rzędzie sumuje się do liczby n.

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{k \quad n-k}$$

$$(a+b)^n = \binom{n}{n \quad 0} a^n + \binom{n}{n-1 \quad 1} a^{n-1} b + \ldots + \binom{n}{0 \quad n} b^n =$$

$$\sum_{\substack{k_1, k_2 \geq 0 \\ k_1+k_2=n}} \binom{n}{k_1 \quad k_2} a^{k_1} b^{k_2}$$

$$\binom{n}{k_1 \quad k_2 \quad \ldots \quad k_r} =$$

$$\binom{n-1}{k_1-1 \quad k_2 \quad \ldots \quad k_r} + \binom{n-1}{k_1 \quad k_2-1 \quad \ldots \quad k_r} + \ldots + \binom{n-1}{k_1 \quad k_2 \quad \ldots \quad k_r-1}$$

Rozmieszczamy n obiektów w r pudełkach, przy czym k_1 obiektów ma być w pierwszym pudełku, k_2 w drugim, ... i k_r w r-tym.

Jeżeli pierwszy obiekt jest umieszczony w pudełku i, to pozostałe n-1 obiekty muszą być rozmieszczone w r pudełkach - k_1 w pierwszym, k_2 w drugim, ... , k_i-1 w i-tym ... oraz k_r w r-tym. i może przyjąć dowolną z wartości od **1** do r.